

Clasa a XI a

1. a) Să se dea un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $\det(A^2 + I_2) = 2$;

b) Să se arate că nu există matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care

$$\det(A^2 + I_2) = 2 \cdot \det(A + I_2).$$

RMT 1/2009

2. Fie $a_1 = 1$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_{n+1} = \frac{n}{1 + a_n}$, $\forall n \geq 1$. Arătați că:

a) $a_n \geq \sqrt{n} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{n} = 1$.

RMT 1/2009

3. Se consideră $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $BC = I_2$ și

funcțiile $f, g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care

$$(f \circ g)(X) = A \cdot g(X) + f(X) \cdot B, \quad \forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se arate că :

a) există $B, C \in M_2(\mathbb{R})$, $B \neq I_2$, $C \neq I_2$, pentru care $BC = I_2$;

b) dacă f este injectivă, atunci și g este injectivă.

4. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - ax}{x^2 + 2x - 3} = b$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.